

MATURA 2012

Powtórka do matury z matematyki

**Część III: Równania i nierówności
ODPOWIEDZI**

Organizatorzy: MatmaNa6.pl, Dziennik.pl

Witaj,

Dzisiaj rozwiązania zadań do działu Równania i nierówności. Jeżeli coś jest dla Ciebie niejasne i nie wiesz skąd takie, a nie inne rozwiązanie to możesz doczytać na temat równań pod adresem http://matmana6.pl/tablice_matematyczne

Powodzenia,

Redaktorzy portalu MatmaNa6.pl

Dziennikarze Dziennik.pl

Równania i nierówności

Zadanie 1:

Wskaż zbiór będący rozwiązaniem nierówności $2x^2 + 5x - 12 < 0$.

a) $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$

b) $(-\infty, -4) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

c) $\left(-4, \frac{2}{3}\right)$

d) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (4, +\infty)$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)

$$2x^2 + 5x - 12 < 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 121$$

$$\sqrt{\Delta} = 11$$

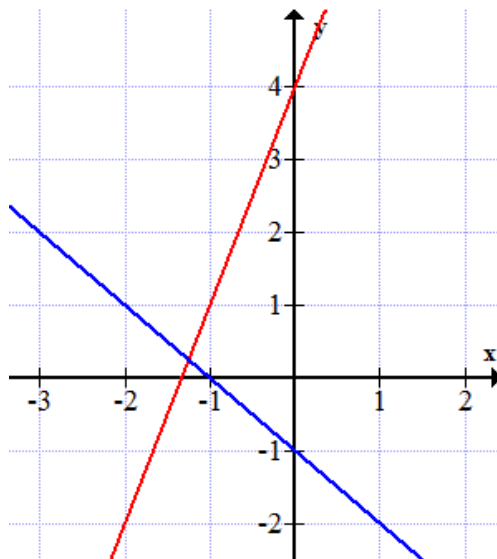
$$x_1 = \frac{-5 + 11}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 11}{2 \cdot 2} = -4$$

$$x \in \left(-4, \frac{3}{2}\right)$$

Zadanie 2:

Wskaż układ równań, którego graficzna ilustracja znajduje się poniżej.



$$a) \begin{cases} x + y = -1 \\ -3x + y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ -x + 4y = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -x + 5y = -1 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 7y = 3 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)

Oznaczmy szukane równanie prostej narysowanej czerwonym kolorem przez

$y = ax + b$. Aby wyznaczyć współczynniki a i b odczytujemy z wykresu dwa punkty należące do tej prostej.

$$P_1=(0,4)$$
$$P_2=(-1,1)$$

$$\begin{cases} 4=a \cdot 0+b \\ 1=a \cdot (-1)+b \end{cases}$$
$$\begin{cases} b=4 \\ 1=-a+4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$$

Szukane równanie to $y=3x+4$.

Oznaczmy szukane równanie prostej narysowanej niebieskim kolorem przez $y=cx+d$. Aby wyznaczyć współczynniki c i d odczytujemy z wykresu dwa punkty należące do tej prostej.

$$P_3=(0,-1)$$
$$P_4=(-1,0)$$

$$\begin{cases} -1=c \cdot 0+d \\ 0=c \cdot (-1)+d \end{cases}$$
$$\begin{cases} c=-1 \\ d=-1 \end{cases}$$

Szukane równanie to $y=-x-1$.

Zadanie 3:

Rozwiązaniem nierówności $(x-3)(x+2)(x-5)>0$ jest zbiór:

- a) $(-2,3) \cup (5, +\infty)$
- b) $(-\infty, -2) \cup (3,5)$
- c) $(-5, -3) \cup (2, +\infty)$
- d) $(-\infty, -2) \cup (-3,5)$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)

Zadanie 4:

Rozwiązaniem równania $\frac{2x+1}{4x-4} = \frac{5}{4}$ jest:

a) $x = -2$

b) $x = 1$

c) $x = 2$

d) $x = 4$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: c)

$$\frac{2x+1}{4x-4} = \frac{5}{4}$$

$$4x-4 \neq 0$$
$$x \neq 1$$

$$4(2x+1) = 5(4x-4)$$

$$8x+4 = 20x-20$$

$$12x = 24$$

$$x = 2$$

Zadanie 5:

Rozwiąż nierówność $f(x-1) < g(x+2)$, gdzie $f(x) = 4x+7$, $g(x) = -x^2$.

Rozwiązanie:

$$f(x-1) = 4(x-1) + 7 = 4x - 4 + 7 = 4x + 3$$

$$g(x+2) = -(x+2)^2 = -x^2 - 4x - 4$$

Rozwiązujemy nierówność:

$$4x + 3 < -x^2 - 4x - 4$$

$$-x^2 - 8x - 7 > 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = 64 - 28 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{8+6}{-2} = -7$$

$$x_2 = \frac{8-6}{-2} = -1$$

$$x \in (-7, -1)$$

Zadanie 6:

Rozwiąż równanie:

$$2x^3 - 18x + x^2 - 9 = 0$$

Rozwiązanie:

$$2x^3 - 18x + x^2 - 9 = 0$$

$$2x(x^2 - 9) + (x^2 - 9) = 0$$

$$(2x+1)(x^2-9) = 0$$

$$(2x+1)(x-3)(x+3) = 0$$

$$\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ x=\frac{-1}{2} \end{array} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{l} x-3=0 \\ x=3 \end{array} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{l} x+3=0 \\ x=-3 \end{array}$$

Zadanie 7:

Rozwiąż równanie.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Niech $t = x^2$ ($t \geq 0$).

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$\Delta_t = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64$$

$$t_1 = \frac{10 - 8}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{10 + 8}{2} = 9$$

$$x^2 = 1 \quad x^2 = 9 \\ x = 1 \text{ lub } x = -1 \quad x = 3 \text{ lub } x = -3$$

Zadanie 8:

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} ax + by = 12 \\ 2ax - 3by = 9 \end{cases}$$

jest para liczb

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \cdot$$

Oblicz a i b .

Rozwiązanie:

Para liczb

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

spełnia układ równań.

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 3 = 12 \\ 2a \cdot 1 - 3b \cdot 3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3b=12 \\ 2a-9b=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=12-3b \\ 2a-9b=9 \end{cases}$$

$$2(12-3b)-9b=9$$

$$24-6b-9b=9$$

$$-15b=-15$$

$$b=1$$

$$a=12-3 \cdot 1=9$$

$$\begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases}$$

Zadanie 9:

Rozwiąż równanie.

$$|2x-3|+|4x-1|=10$$

Rozwiązanie:

$$|2x-3|+|4x-1|=10$$

$$2x-3=0 \quad 4x-1=0$$

$$x=\frac{3}{2} \quad x=\frac{1}{4}$$

I. $x \in (-\infty, \frac{1}{4}]$

$$-2x+3-4x+1=10$$

$$-6x=6$$

$$x=-1$$

II. $x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$

$$-2x+3+4x-1=10$$

$$2x=8$$

$$x=4$$

Ponieważ $4 \notin (\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$, to nie jest rozwiązaniem.

III. $x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$

$$2x - 3 + 4x - 1 = 10$$

$$6x = 14$$

$$x = \frac{7}{3}$$

Wszystkimi rozwiązaniami równania są: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{7}{3}$.

Zadanie 10:

Dla jakich wartości parametru m , równanie $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ ma dwa rozwiązania ujemne?

Rozwiązanie:

$$x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$$

1. Aby równanie miało dwa rozwiązania, to wyróżnik musi być dodatni.

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 = 4m + 1 > 0$$

$$4m > -1$$

$$m > \frac{-1}{4}$$

2. Rozwiązania równania będą ujemne, jeżeli ich iloczyn będzie dodatni, a ich suma ujemna.

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2}{1} > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-(2m+1)}{1} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m > \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$m \in \left(\frac{-1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$$

Łącząc pierwszy i drugi przypadek otrzymujemy, że $m \in \left(\frac{-1}{4}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

Kolejna porcja zadań, tym razem z działu Funkcje dostępna będzie w poniedziałek pod adresem

<http://dziennik.pl>

Szczegółowe wyjaśnienia zagadnień z działu Równania i Nierówności, które pomogą Ci w rozwiązaniu powyższych zadań znajdziesz na stronie

http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum

Wszelkie uwagi, komentarze na temat powtórki maturalnej można kierować na adres pytania@matmana6.pl.

Redaktorzy MatmaNa6.pl prowadzą:

