

MATURA 2012

Powtórka do matury z matematyki

Część I: Liczby rzeczywiste
ODPOWIEDZI

Organizatorzy: MatmaNa6.pl i Dziennik.pl

Witaj,

otrzymałeś już pierwszą z dziesięciu części materiałów powtórkowych do matury z matematyki. Tutaj znajdziesz rozwiązania udostępnionych tam zadań. W każdy poniedziałek pod adresem <http://dziennik.pl> będą dostępne rozwiązania kolejnych części powtórki.

Powodzenia,

Redaktorzy portalu MatmaNa6.pl

Dziennikarze Dziennik.pl

Liczby rzeczywiste

Zadanie 1:

Rozwiązaniami równania $|x-5|=7$ są liczby:

a) $x=-2$ i $x=12$

b) $x=2$ i $x=5$

c) $x=7$ i $x=12$

d) $x=-2$ i $x=-5$

Rozwiązanie:

$$|x-5|=7$$

Opuszczamy wartość bezwzględną i rozwiązujemy równania:

$$\begin{array}{lcl} x-5=7 & \text{lub} & x-5=-7 \\ x=12 & & x=-2 \end{array}$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania: $x=12$ lub $x=-2$. Zatem prawidłowa odpowiedź to a).

Zadanie 2:

5% liczby x jest równe 12,5. Oznacza to, że liczba x jest równa:

a) 250

b) 120

c) 60

d) 30

Rozwiązanie

Skoro 5% liczby x jest równe 12,5, to prawdziwe jest równanie:

$$0,05 x = 12,5$$

$$x = \frac{12,5}{0,05}$$

$$x = 250$$

Zatem prawidłowa odpowiedź to a).

Zadanie 3:

Wskaż, który zbiór zawiera tylko liczby niewymierne.

$$a) A = \{-\pi, \pi, \sqrt{121}\}$$

$$b) B = \left\{\frac{3}{2}, \sqrt{7}, 36\right\}$$

$$c) C = [-\sqrt{3}, \pi, \sqrt{37}]$$

$$d) D = \left\{\frac{3}{2}, 15, 36\right\}$$

Rozwiązanie:

Jedynym zbiorem, który zawiera tylko liczby niewymierne jest zbiór C, zatem prawidłowa odpowiedź to c).

Zadanie 4:

Oblicz $\log_4 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} 64$.

$$a) 4$$

$$b) 12\sqrt{3}$$

$$c) 18$$

$$d) 54$$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź to c).

$$\log_4 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} 64 = \frac{\log 27}{\log 4} \cdot \frac{\log 64}{\log \sqrt{3}} = \frac{\log 27}{\log \sqrt{3}} \cdot \frac{\log 64}{\log 4} = \log_{\sqrt{3}} 27 \cdot \log_4 64 = 6 \cdot 3 = 18$$

Zadanie 5:

Wykonaj obliczenia, a następnie wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.
Oblicz błąd bezwzględny i względny tego przybliżenia.

$$\frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{-8} \div \left(\frac{1}{3}\right)^3}{(\log_5 125)^3}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{-8} \div \left(\frac{1}{3}\right)^3}{(\log_5 125)^3} &= \frac{\left(\frac{2}{8} + \frac{3}{8}\right)^2 \cdot (-2) \div \left(\frac{1}{3^3}\right)}{(3)^3} = \frac{\left(\frac{3+2}{8}\right)^2 \cdot (-2) \div \left(\frac{1}{27}\right)}{27} = \\ &= \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot (-2) \cdot 27}{27} = \left(\frac{25}{64}\right) \cdot (-2) = \frac{-25}{32} = -0,78125 \approx -0,78 \end{aligned}$$

Aby obliczyć błąd przybliżenia wprowadźmy oznaczenia:

$$x = -0,78125$$

$$x_p = -0,78$$

Obliczamy błąd bezwzględny przybliżenia:

$$\Delta = |x - x_p| = |-0,78125 + 0,78| = |-0,00125| = 0,00125$$

Obliczamy błąd względny przybliżenia:

$$\delta = \frac{|x - x_p|}{|x|} = \frac{|-0,78125 + 0,78|}{|-0,78125|} = \frac{|-0,00125|}{0,78125} = \frac{0,00125}{0,78125} = 0,0016$$

Zadanie 6:

P jest zbiorem wszystkich punktów na osi liczbowej, których odległości od punktu 7 jest nie większa niż 5. Wyznacz jakie punkty należą do zbioru P i zaznacz go na osi liczbowej.

Rozwiązanie:

Zbiór P obliczymy rozwiązując nierówność $|x-7| \leq 5$.

$$\begin{aligned} |x-7| &\leq 5 \\ x-7 &\leq 5 \wedge x-7 \geq -5 \\ x &\leq 12 \wedge x \geq 2 \\ x &\in [2, 12] \end{aligned}$$



Zaznaczamy wyznaczony zbiór na osi liczbowej.

Zadanie 7:

Wiedząc, że

$$\begin{cases} \log_2 a + \log_2 b = 6 \\ \log_2 \frac{b}{a} = 2 \end{cases}$$

oblicz a i b . Jakie założenia musimy przyjąć o liczbach a i b ?

Rozwiązanie:

Założenia jakie musimy przyjąć, aby równania miały sens to $a > 0, b > 0$.

Korzystając z własności logarytmów przekształcamy równania.

$$\begin{cases} \log_2(a \cdot b) = 6 \\ \frac{b}{a} = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot b = 2^6 \\ \frac{b}{a} = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot b = 64 \\ b = 4a \end{cases}$$

$$a \cdot 4a = 64$$

$$4a^2 = 64$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4 \text{ lub } a = -4$$

Ponieważ na początku założyliśmy, że $a > 0$, to ujemne rozwiązanie odrzucamy.

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases}$$

Zadanie 8:

Pan Kowalski postanowił założyć lokatę w wysokości 3000 zł na okres jednego roku. Ma do wyboru dwie lokaty:

- lokata A - oprocentowanie w skali roku 8% , roczna kapitalizacja odsetek,
- lokata B - oprocentowanie w skali roku 5% , kapitalizacja odsetek co pół roku.

Oceń, wykonując odpowiednie obliczenia, która z lokat jest bardziej korzystna dla Pana Kowalskiego.

Rozwiązanie:

Obliczając wartość kapitału po zakończeniu lokaty, korzystamy ze wzoru:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{n \cdot m},$$

gdzie

K_0 - początkowa wartość kapitału,

r - roczna stopa procentowa (podana jako wartość dziesiętna),

m - ilość kapitalizacji odsetek w ciągu roku,

n - ilość lat.

Obliczmy wartość kapitału dla każdej z lokat. Dane są:

$K_0 = 3000 \text{ zł}$ - początkowa wartość kapitału,

$n = 1$ - lokata jednoroczna.

Lokata A:

$r = 8\% = 0,08$ - roczna stopa procentowa

$m = 1$ - ilość kapitalizacji odsetek w ciągu roku

$$K_A = 3000 \left(1 + \frac{0,08}{1} \right)^{1 \cdot 1} = 3000 \cdot 1,08 = 3240 \text{ zł}$$

Lokata B:

$$r = 5\% = 0,05$$

$$m = 2$$

$$K_B = 3000 \left(1 + \frac{0,05}{2} \right)^{1 \cdot 2} = 3000 \cdot 1,025^2 \approx 3151,88 \text{ zł}$$

Bardziej opłacalna jest lokata A.

Zadanie 9:

Dane są liczby naturalne a, b, k i l takie, że $a = \text{NWD}(a, b) \cdot k$,
 $b = \text{NWD}(a, b) \cdot l$. Wykaż, że $\text{NWD}(k, l) = 1$.

Rozwiązanie:

W zadaniu zakładamy, że a, b, k i l są liczbami naturalnymi oraz
 $a = \text{NWD}(a, b) \cdot k$ i $b = \text{NWD}(a, b) \cdot l$. Mamy udowodnić, że
 $\text{NWD}(k, l) = 1$.

Dowód nie wprost.

Wprowadźmy oznaczenie $\text{NWD}(a, b) = d$. Załóżmy, że $\text{NWD}(k, l) = p$,
gdzie $p \neq 1$. Wynika stąd, że zarówno liczba k jak i l są podzielne przez p .
Istnieją zatem pewne liczby naturalne x i y takie, że $k = p \cdot x$ i $l = p \cdot y$.
Zatem

$$a = d \cdot p \cdot x,$$

$$b = d \cdot p \cdot y.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ w tym wypadku największym wspólnym
dzielnikiem liczb a i b jest $d \cdot p$, a nie d jak zakładaliśmy na początku.
Dowód został zakończony.

Zadanie 10:

Wykaż, że jeżeli do liczby dwucyfrowej dodamy liczbę powstałą z przestawienia jej cyfr, to otrzymamy liczbę podzielną przez 11.

Rozwiązanie:

Oznaczmy dowolną liczbę dwucyfrową przez $10a+b$. Liczba powstała z odwrócenia jej cyfr, to $10b+a$. Po zsumowaniu tych liczb otrzymamy:

$$10a+b+10b+a=11a+11b=11(a+b)$$

Przedstawiliśmy sumę liczb jako iloczyn $11 \cdot k$, gdzie $k=a+b$, zatem suma jest podzielna przez 11. Dowód został zakończony.

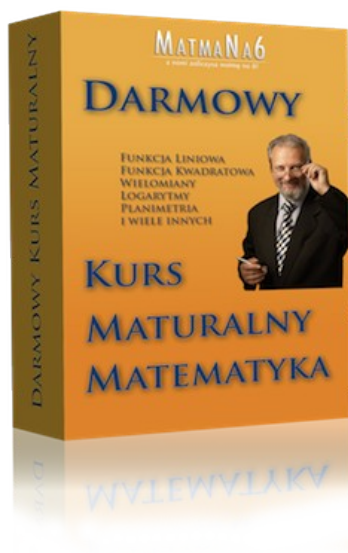
Rozwiązania powyższych zadań będą dostępne w czwartek pod adresem

<http://www.dziennik.pl>

Szczegółowe wyjaśnienia zagadnień z działu liczby rzeczywiste, które pomogą Ci w rozwiązaniu powyższych zadań znajdziesz na stronie

http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum

Wszelkie uwagi, komentarze na temat powtórki maturalnej można kierować na adres pytania@matmana6.pl.



Redaktorzy serwisu MatmaNa6.pl prowadzą Darmowy Kurs Maturalny z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym, który składa się z ponad 70 lekcji. Każda lekcja zawiera:

1. omówienie wybranego zagadnienia,
2. ćwiczenia interaktywne,
3. przykłady zadań,
4. zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania,
5. rozwiązania zadań z poprzedniej lekcji.

[Kliknij aby zapisać się na kurs.](#)