Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej $(t = 0)$ masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od $1,5$ grama.
Zapisz obliczenia.

$m_0 = 4g$

$m(t) = m_0 \cdot (0{,}81)^t$

$m_0 \cdot (0{,}81)^t < 1{,}5$

$4 \cdot 0{,}81^t < 1{,}5$

$0{,}81^t < 0{,}375$

$t = 5$

Zadanie 2. (0–3)

Tomek i Romek postanowili rozegrać między sobą pięć partii szachów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Tomka jest równe $\frac{1}{4}$.

Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

$n = 5$

$p = \frac{1}{4} \qquad q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$P_5(4) + P_5(5) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 =$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{15}{4} + \frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Zadanie 3. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
Punkt $P=(x_0\,,3)$ należy do wykresu funkcji f.

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.
Zapisz obliczenia.

$$f(x)=\frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$$

zał:
$x^2+2x+8\neq 0$
$\Delta<0$
$x\in\mathbb{R}$

$$(3x^2-2x)'=6x-2$$
$$(x^2+2x+8)'=2x+2$$

$$f'(x)=\frac{(6x-2)(x^2+2x+8)-(3x^2-2x)(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2}=$$

$$=\frac{6x^3+12x^2+48x-2x^2-4x-16-(6x^3+6x^2-4x^2-4x)}{(x^2+2x+8)^2}=$$

$$=\frac{6x^3+12x^2+48x-2x^2-4x-16-6x^3-6x^2+4x^2+4x}{(x^2+2x+8)^2}=$$

$$=\frac{8x^2+48x-16}{(x^2+2x+8)^2}$$

$$P=(x_0,3)$$

$$3=\frac{3x_0^2-2x_0}{x_0^2+2x_0+8}$$

$$3x_0^2+6x_0+24=3x_0^2-2x_0$$
$$8x_0=-24$$
$$x_0=-3 \qquad P=(-3,3)$$

$$a=f'(-3)=\frac{8\cdot 9+48\cdot(-3)-16}{(9-6+8)^2}=\frac{72-144-16}{121}=\frac{-88}{121}$$

$$y=a(x-x_0)+f(x_0)=-\frac{88}{121}(x+3)+3=$$

$$=-\frac{88}{121}x-\frac{264}{121}+\frac{363}{121}=-\frac{8}{11}x+\frac{9}{11}$$

Zadanie 4. (0–3)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$.

Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

$$x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$$

$$x^3 - x^2y + y^3 - xy^2 \leq 0$$

$$x^2(x-y) - y^2(x-y) \leq 0$$

$$(x-y)(x^2-y^2) \leq 0$$

$$(x-y)(x-y)(x+y) \leq 0$$

$$(x-y)^2(x+y) \leq 0$$

$$x+y=4 \quad \Rightarrow \quad x = 4-y$$

$$4(x-y)^2 \leq 0$$

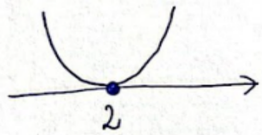
$$4(4-y-y)^2 \leq 0$$

$$4(4-2y)^2 \leq 0 \quad /:4$$

$$(4-2y)^2 \leq 0$$

$$16 - 16y + 4y^2 \leq 0 \quad /:4$$

$$y^2 - 4y + 4 \leq 0$$



$$\Delta = 0$$

$$x_0 = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$$

x=2

$$\begin{cases} x = 4-y \\ x = 2 \end{cases}$$

$$2 = 4 - y$$

$$y = 2$$

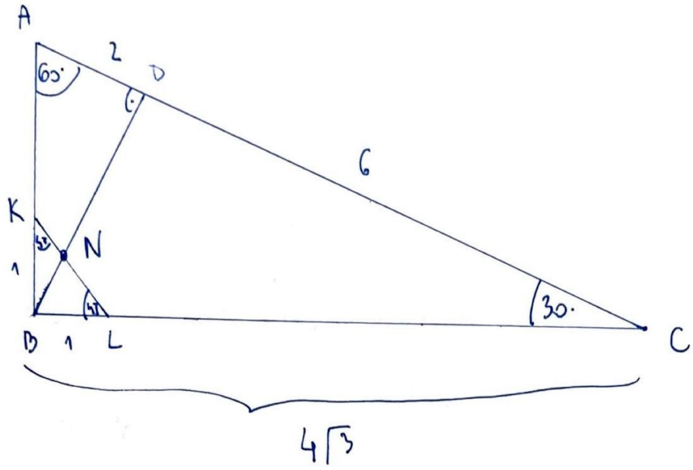
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

ckd.

Zadanie 5. (0–3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60°$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N, a ponadto $|AD| = 2$.

Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.



Teza:

$|ND| = \sqrt{3}+1$

ΔADB oraz ΔBCD oraz ΔBCA

to trójkąty charakterystyczne $60°, 30°, 90°$

stąd $|BD| = 2\sqrt{3}$, $|AB| = 4$

jeżeli $|BD| = 2\sqrt{3}$ to $|DC| = 6$ oraz $|BC| = 4\sqrt{3}$

z tw. sinusów w ΔBLK

$$\frac{|BN|}{\sin 45°} = \frac{1}{\sin 105°}, \text{ bo } |\sphericalangle KNB| = 105° = 60° + 45°$$

$$\frac{|BN|}{\sin 45°} = \frac{1}{\sin(60°+45°)}$$

$$\sin(60°+45°) = \sin 60° \cos 45° + \sin 45° \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{|BN|}{\sin 45°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$|BN| = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$

$$|BN| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{12}-4}{4} = \frac{4\sqrt{3}-4}{4} = \sqrt{3}-1$$

$$|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1$$

Zadanie 6. (0–3)

Rozwiąż równanie

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$$

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x)+1$$

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(4x+6x)+1$$

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2(\sin(4x)\cos(6x) + \cos(4x)\sin(6x))+1$$

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(4x)\cos(6x) + 2\cos(4x)\sin(6x)+1$$

$$2\sin(4x)\cos(6x) - 2\cos(4x)\sin(6x) = 1$$

$$2(\sin(4x)\cos(6x) - \cos(4x)\sin(6x)) = 1$$

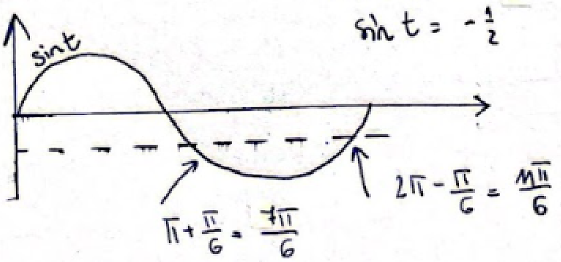
$$2(\sin(4x-6x)) = 1$$

$$\sin(-2x) = \frac{1}{2}$$

$$-\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin t = -\frac{1}{2} \qquad t=2x$$



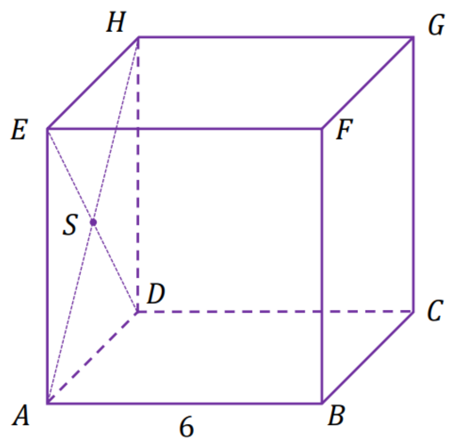
$$2x = \frac{11\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{7\pi}{6}+2k\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{12}+k\pi \qquad x = \frac{7\pi}{12}+k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

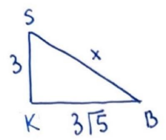
Zadanie 7. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

1) Punkt K na środku AD



$KB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$x^2 = 9 + 45$

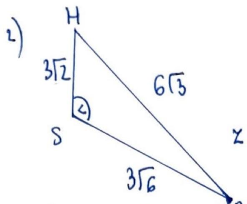
$x = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$SB = 3\sqrt{6}$

$SH = 3\sqrt{2}$

$BH = 6\sqrt{3}$

2)



z tw. cosinusa dla Δ SBH

$(6\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \cos\alpha$

$36 \cdot 3 = 18 + 54 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \cos\alpha$

$108 = 72 - 18\sqrt{12} \cdot \cos\alpha$

$36 = -18\sqrt{12} \cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{12}} = -\frac{2\sqrt{12}}{12} = -\frac{\sqrt{12}}{6}$

3)

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{12}{36}$

$\sin^2\alpha = \frac{24}{36}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \lor -\frac{\sqrt{6}}{3}$ odpada

4) $\frac{1}{2} 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot h$

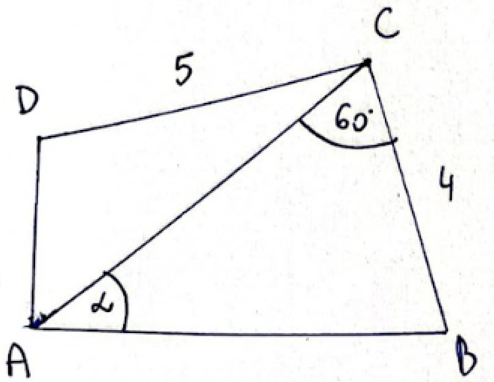
$9 \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 6\sqrt{3} \cdot h$

$h = \frac{3\sqrt{72}}{6\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{24}}{6} = \sqrt{6}$

Zadanie 8. (0–4)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze $60°$, natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$.

Oblicz obwód czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.



Z tw. sinusów:

$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$\frac{4}{\frac{1}{4}} = \frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}|AB|$

$8\sqrt{3} = |AB|$

z warunku okręgu upisanego w czworokąt:

$|AD| + 4 = 5 + 8\sqrt{3}$

$|AD| = 1 + 8\sqrt{3}$

$Obw = 1 + 8\sqrt{3} + 5 + 4 + 8\sqrt{3} =$

$= 16\sqrt{3} + 10$

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$$

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ *dla każdej liczby rzeczywistej* a.

$$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$$

$$\sqrt{(x+2)^2} < \frac{25}{3} - \sqrt{(x-3)^2}$$

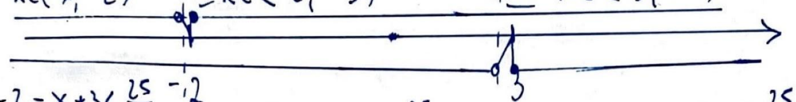
$$|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$$

$$|x+2| + |x-3| < \frac{25}{3}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x+2 \geq 0 \\ -x-2 & \text{dla } x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{dla } x < -2 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{dla } x-3 \geq 0 \\ -x+3 & \text{dla } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{dla } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{dla } x < 3 \end{cases}$$

I $x \in (-\infty, -2)$ II $x \in \langle -2, 3)$ III $x \in \langle 3, +\infty)$



I

$$-x-2-x+3 < \frac{25}{3}$$
$$-2x < \frac{22}{3}$$
$$x > -\frac{11}{3}$$
$$\begin{cases} x \in (-\infty, -2) \\ x \in \left(-\frac{11}{3}, +\infty\right) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$x \in \left(-\frac{11}{3}, -2\right)$$

II

$$x+2-x+3 < \frac{25}{3}$$
$$5 < \frac{25}{3}$$
$$x \in \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \langle -2, 3) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$x \in \langle -2, 3)$$

III

$$x+2+x-3 < \frac{25}{3}$$
$$2x < \frac{28}{3}$$
$$x < \frac{14}{3}$$
$$x < 4\tfrac{2}{3}$$
$$\begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ x \in \left(-\infty, \frac{14}{3}\right) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$x \in \left\langle 3, \frac{14}{3}\right)$$

Odp: I i II i III $x \in \left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}\right)$

Zadanie 10. (0–4)

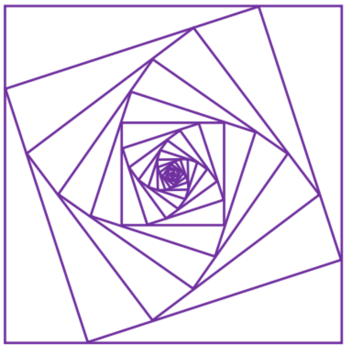
Określamy kwadraty K_1, K_2, K_3, … następująco:

- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.
Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

$Obw_1 = 4a$

z tw. Pitagorasa

$a_2^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2$, $a_2 > 0$

$a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$

czyli obwód: $Obw_2 = 4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a = \sqrt{10}a$

$q = \frac{\sqrt{10}a}{4a} = \frac{\sqrt{10}}{4} \in (-1, 1)$

czyli suma ciągu zbieżnego istnieje

$$S = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{\frac{4-\sqrt{10}}{4}} = \frac{16a}{4-\sqrt{10}} \cdot \frac{4+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}} = \frac{16a(4+\sqrt{10})}{16-10} =$$

$$= \frac{8a(4+\sqrt{10})}{3}$$

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$. Zapisz obliczenia.

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

$$\begin{cases} 1)\ \Delta > 0 \\ 2)\ x_1^3 + x_2^3 > -28 \end{cases}$$

1) $\Delta > 0$

$4^2 - 4\cdot\left(-\frac{m-3}{m-2}\right) > 0$

$16 + \frac{4m-12}{m-2} > 0$

$\frac{16m - 32 + 4m - 12}{m-2} > 0$

$\frac{20m-44}{m-2} > 0$

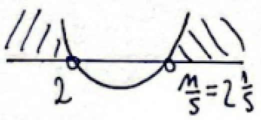
$m-2 \neq 0$

$m \neq 2$

$m \in \mathbb{R} - \{2\}$

$(20m-44)(m-2) > 0$

$m = \frac{44}{20} = \frac{11}{5} \qquad m = 2$



2) $x_1^3 + x_2^3 > -28$

$(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) > -28$

$-\frac{b}{a}\cdot\left((x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2\right) > -28$

$-\frac{b}{a}\cdot\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right) > -28$

$-b\left((b)^2 - 3c\right) > -28$

$-4\left(16 + 3\cdot\frac{m-3}{m-2}\right) > -28 \quad /:(-4)$

$16 + \frac{3m-9}{m-2} < 7 \quad /-16$

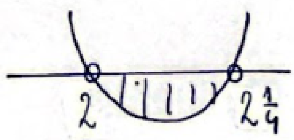
$\frac{3m-9}{m-2} < -9$

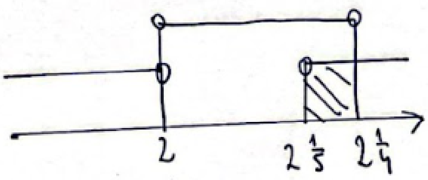
$\frac{3m-9+9(m-2)}{m-2} < 0$

$(3m-9+9m-18)(m-2) < 0$

$(12m-27)(m-2) < 0$

$m = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} \qquad m = 2$





odp: $m \in \left(2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{4}\right)$

Zadanie 12.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$ dla każdej liczby dodatniej x.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x wyrażenie

$$81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$$

można równoważnie przekształcić do postaci $x^4 + x^2 - 6x$.

$$81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x =$$

$$= 3^{4\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 3^{\frac{3}{2}} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x =$$

$$= \underbrace{3^{\log_3 x^4}}_{a^{\log_a b} = b} + \frac{\log_2 \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x =$$

$$= x^4 + \frac{3 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x =$$

$$= x^4 + \frac{3}{3} x^2 - 6x = x^4 + x^2 - 6x$$

zał. $x > 0$

aby $\log_3 x$ istniał

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \cancel{\log_2} 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\cancel{\log_2 3}} = \log_2 2 = 1$$

szczególny przypadek zastosowanie wzoru na zamianę podstawy:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Zadanie 12.2. (0–4)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f określonej dla każdej liczby <u>dodatniej</u> x. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że wzór funkcji f można przedstawić w postaci $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$.

$f(x) = x^4 + x^2 - 6x$

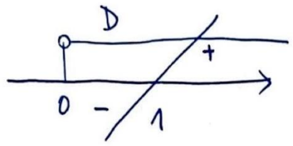
$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6$

	4	0	2	-6
1	4	4	6	0

$D = (0, +\infty)$

$(x-1)(4x^2 + 4x + 6) = 0$

$x_1 = 1$ $\quad \Delta < 0$



Funkcja ma minimum dla $x = 1$

$f_{MIN} = f(1) = 1 + 1 - 6 = -4$

UZASADNIENIE

$f'(x) > 0$ w przedziale $(1, +\infty)$

czyli $f(x)$ rośnie w przedziale $[1, +\infty)$

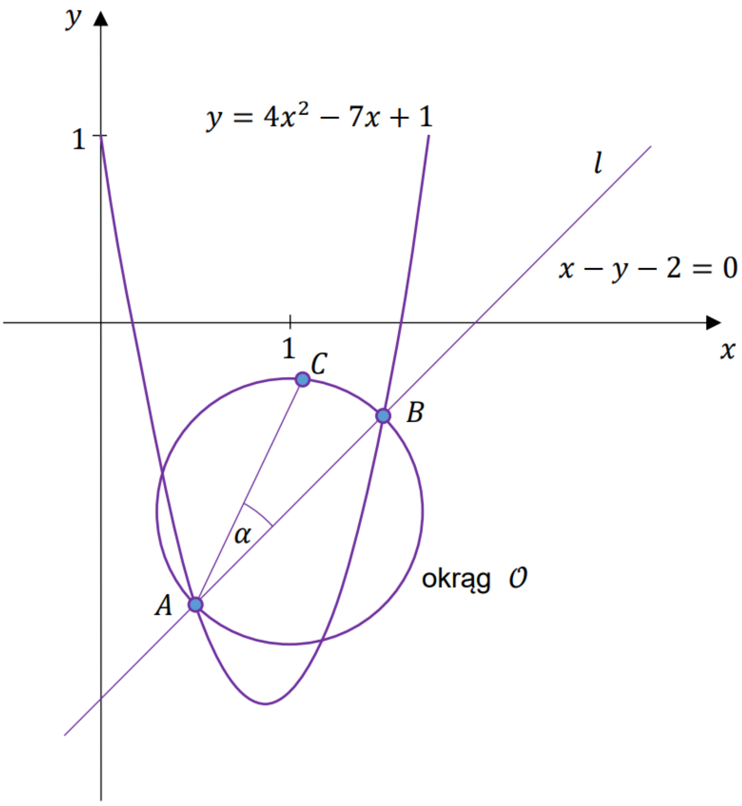
$f'(x) < 0$ w przedziale $(0, 1)$

czyli $f(x)$ maleje w przedziale $(0, 1]$

Zatem dla $x = 1$ funkcja przyjmuje najmniejszą wartość

Zadanie 13. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach A oraz B. Odcinek AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Punkt C leży na okręgu $\mathcal{O}$ nad prostą l, a kąt BAC jest ostry i ma miarę α taką, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).



Oblicz współrzędne punktu C. Zapisz obliczenia.

PARABOLA $y=4x^2-7x+1$

PROSTA

$l: \ x-y-2=0$

$y=x-2$

① ZAUWAŻMY, ŻE ΔABC JEST PROSTOKĄTNY

AB → ŚREDNICA, WIĘC $\sphericalangle ACB$ to $90°$

② OBLICZAMY WSPÓŁRZĘDNE PUNKTÓW A i B

$$\begin{cases} y=4x^2-7x+1 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$4x^2-7x+1=x-2$$

$$4x^2-8x+3=0$$

$$\Delta=16$$

$x_1=\frac{1}{2}$ $\quad$ $x_2=\frac{3}{2}$

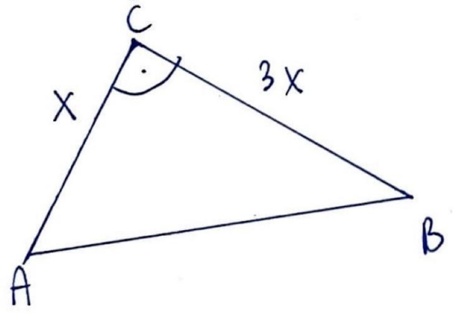
$y_1=-\frac{3}{2}$ $\quad$ $y_2=-\frac{1}{2}$

$A=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ $\quad$ $B=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$|AB|=\sqrt{2}$$

③ $tg\alpha=\frac{1}{3}$



$$tg\alpha=\frac{|CB|}{|AC|}=\frac{1}{3}$$

$$3|CB|=|AC|=x$$

z tw. Pitagorasa

$|AC|=\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ $|BC|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

(4) ZNAJDUJEMY WSPÓŁRZĘDNE C

$B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$C = (x, y)$ $\qquad |BC| = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad |^2$$

$$\frac{9}{4} - 3x + x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{10}{4} - \frac{1}{5} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{23}{10} = 0$$

teraz punkt wspólny z okręgiem, gdzie

$S = (1; -1) \qquad r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{23}{10} = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

równanie okręgu w postaci ogólnej

$$-x - y + \frac{4}{5} = 0$$

$$x = \frac{4}{5} - y$$

i podstawiamy do r. okręgu

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{5} - y\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$2y^2 + \frac{12}{5}y + \frac{1}{25} + \frac{1}{2} = 0 \quad |\cdot 50$$

$$100y^2 + 120y + 27 = 0$$

$$\Delta = 3600$$

$y_1 = -\frac{9}{10} \qquad x_1 = \frac{4}{5} + \frac{9}{10} = \frac{17}{10}$

$y_2 = -\frac{3}{10} \qquad x_2 = \frac{4}{5} + \frac{9}{10} = \frac{11}{10}$

Odp. $C\left(\frac{17}{10}, -\frac{19}{10}\right) \vee C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$

Ponieważ z treści zadania punkt C leży nad prostą k zatem $C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Sprawdzenie: $y = x - 2$

$f(x) = x - 2$

$f\left(\frac{17}{10}\right) = \frac{17}{10} - 2 = -\frac{3}{10} \qquad -\frac{9}{10} < -\frac{3}{10}$

Punkt $C = \left(\frac{17}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ leży nad funkcją liniową, więc ta odpowiedź nie spełnia warunków zadania.