Zadanie 1. (0–1)

Granica $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ jest równa

A. (-1) **B.** 0 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x+2} = \frac{3}{3} = 1$$

Zadanie 2. (0–1)

Dane są wektory $\vec{u} = [4, -5]$ oraz $\vec{v} = [-1, -5]$. Długość wektora $\vec{u} - 4\vec{v}$ jest równa

A. 7 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 23

$$\vec{u} - 4\vec{v} = [4, -5] - 4[-1, -5] = [4, -5] - [-4, -20] =$$

$$= [4+4, -5+20] = [8, 15]$$

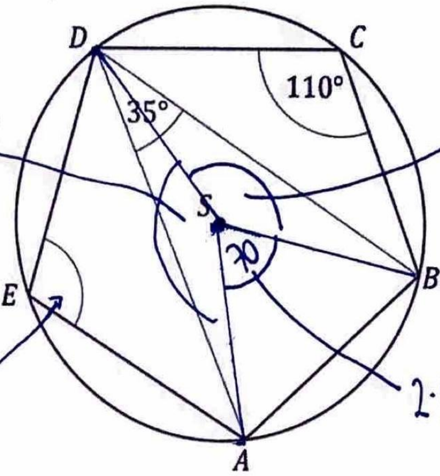
$$d = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$$

Zadanie 3. (0–1)

Punkty A, B, C, D, E leżą na okręgu o środku S. Miara kąta BCD jest równa $110°$, a miara kąta BDA jest równa $35°$ (zobacz rysunek).

3) $360° - 70° - 140° = 150°$

4) $180 - \frac{1}{2} \cdot 150° = 105°$



$140°$ 2)

$2 \cdot 35°$ 1)

Wtedy kąt DEA ma miarę równą

A. $100°$ B. $105°$ C. $110°$ D. $115°$

Zadanie 4. (0–1)

Dany jest zbiór trzynastu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, z którego losujemy jednocześnie dwie liczby. Wszystkich różnych sposobów wylosowania z tego zbioru dwóch liczb, których iloczyn jest liczbą parzystą, jest

A. $\binom{7}{2} + 49$ **B.** $\binom{6}{1} \cdot \binom{7}{1} + 49$ **C.** $\binom{13}{2} - \binom{7}{2}$ **D.** $\binom{13}{2} - \binom{6}{2}$

$\{\underline{1}, 2, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, \underline{9}, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}\}$

$$\binom{13}{2} - \binom{7}{2}$$

na ile sposobów losujemy 2 liczby

wszystkie sposoby wylosowania dwóch nieparzystych, bo iloczyn nieparzysty

reszta będzie miała iloczyn parzysty

Zadanie 5. (0–2)

Wielomian $W(x) = 7x^3 - 9x^2 + 9x - 2$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Oblicz ten pierwiastek.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

$$W\left(\frac{2}{7}\right) = 7\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^3 - 9\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 9\cdot\frac{2}{7} - 2 =$$

$$= \cancel{7}\cdot\frac{8}{34\cancel{3}} - 9\cdot\frac{4}{49} + \frac{18}{7} - 2 =$$

$$= \frac{8}{49} - \frac{36}{49} + \frac{126}{49} - \frac{98}{49} =$$

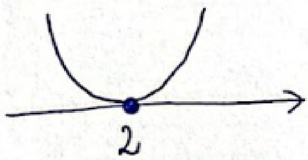
$$= 0 \qquad \boxed{285}$$

$$\frac{2}{7} \approx 0{,}2857\ldots$$

Zadanie 6. (0–3)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x+y=4$ i nierówność $x^3-x^2y \le xy^2-y^3$. Wykaż, że $x=2$ oraz $y=2$.

$$x^3-x^2y \le xy^2-y^3$$
$$x^3-x^2y+y^3-xy^2 \le 0$$
$$x^2(x-y)-y^2(x-y) \le 0$$
$$(x-y)(x^2-y^2) \le 0$$
$$(x-y)(x-y)(x+y) \le 0$$
$$(x-y)^2(x+y) \le 0$$
$$x+y=4 \Rightarrow x=4-y$$
$$4(x-y)^2 \le 0$$
$$4(4-y-y)^2 \le 0$$
$$4(4-2y)^2 \le 0 \quad /:4$$
$$(4-2y)^2 \le 0$$
$$16-16y+4y^2 \le 0 \quad /:4$$
$$y^2-4y+4 \le 0$$
$$\Delta = 0$$
$$x_0 = \frac{4}{2\cdot 1} = 2$$



$x=2$

$$\begin{cases} x=4-y \\ x=2 \end{cases}$$
$$2=4-y$$
$$y=2$$

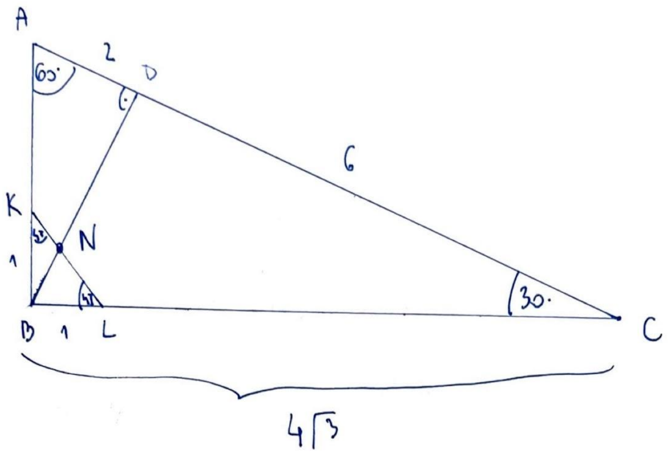
$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

ckd.

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N, a ponadto $|AD| = 2$.

Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.



Teza:

$|ND| = \sqrt{3}+1$

ΔADB oraz ΔBCD oraz ΔBCA

to trójkąty charakterystyczne $60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$

stąd $|BD| = 2\sqrt{3}$, $|AB| = 4$

jeżeli $|BD| = 2\sqrt{3}$ to $|DC| = 6$ oraz $|BC| = 4\sqrt{3}$

z tw. sinusów w ΔBLK

$$\frac{|BN|}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 105^\circ}, \text{ bo } |\sphericalangle KNB| = 105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

$$\frac{|BN|}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin(60^\circ+45^\circ)}$$

$$\sin(60^\circ+45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{|BN|}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

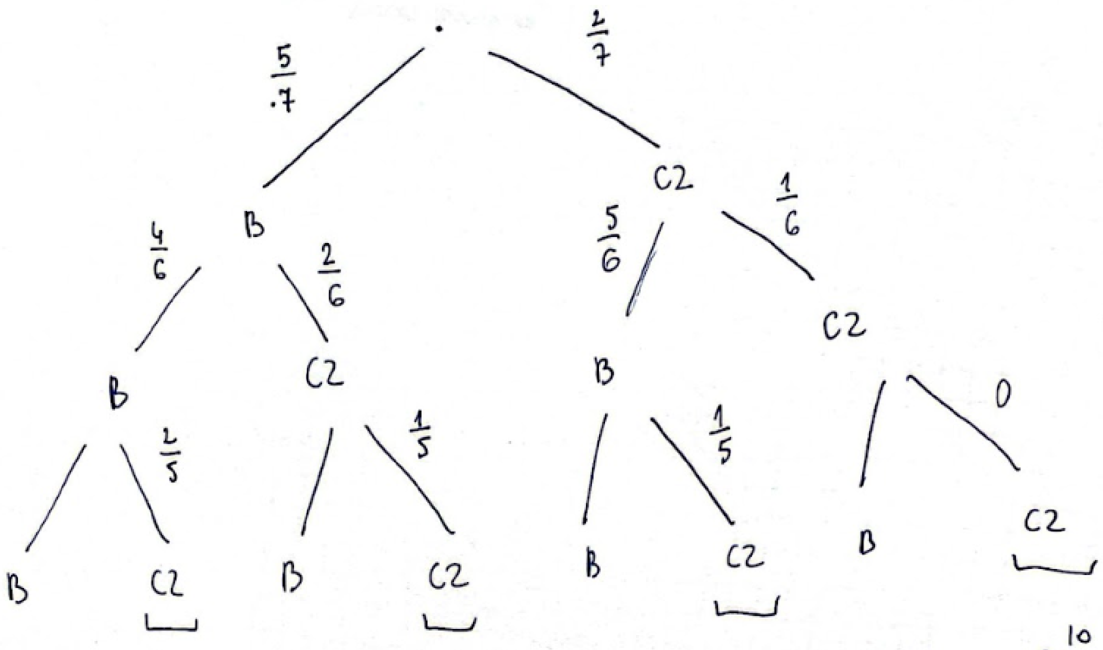
$$|BN| = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$

$$|BN| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{12}-4}{4} = \frac{4\sqrt{3}-4}{4} = \sqrt{3}-1$$

$$|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1$$

Zadanie 8. (0–3)

W pojemniku jest siedem kul: pięć kul białych i dwie kule czarne. Z tego pojemnika losujemy jednocześnie dwie kule bez zwracania. Następnie – z kul pozostałych w pojemniku – losujemy jeszcze jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w drugim losowaniu.



$$\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{40+10+10}{7\cdot 6\cdot 5}=\frac{\cancel{60}^{10}}{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}=$$

$$=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

Zadanie 9. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Punkt $P=(x_0,3)$ należy do wykresu funkcji f. Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.

$$f(x)=\frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$$

zał:
$x^2+2x+8\neq 0$
$\Delta<0$
$x\in\mathbb{R}$

$$(3x^2-2x)'=6x-2$$
$$(x^2+2x+8)'=2x+2$$

$$f'(x)=\frac{(6x-2)(x^2+2x+8)-(3x^2-2x)(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2}=$$
$$=\frac{6x^3+12x^2+48x-2x^2-4x-16-(6x^3+6x^2-4x^2-4x)}{(x^2+2x+8)^2}=$$
$$=\frac{6x^3+12x^2+48x-2x^2-4x-16-6x^3-6x^2+4x^2+4x}{(x^2+2x+8)^2}=$$
$$=\frac{8x^2+48x-16}{(x^2+2x+8)^2}$$

$$P=(x_0,3)$$
$$3=\frac{3x_0^2-2x_0}{x_0^2+2x_0+8}$$
$$3x_0^2+6x_0+24=3x_0^2-2x_0$$
$$8x_0=-24$$
$$x_0=-3 \qquad P=(-3,3)$$

$$a=f'(-3)=\frac{8\cdot 9+48\cdot(-3)-16}{(9-6+8)^2}=\frac{72-144-16}{121}=\frac{-88}{121}$$

$$y=a(x-x_0)+f(x_0)=-\frac{88}{121}(x+3)+3=$$
$$=-\frac{88}{121}x-\frac{264}{121}+\frac{363}{121}=-\frac{8}{11}x+\frac{9}{11}$$

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$$

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ *dla każdej liczby rzeczywistej* a.

$$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$$

$$\sqrt{(x+2)^2} < \frac{25}{3} - \sqrt{(x-3)^2}$$

$$|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$$

$$|x+2| + |x-3| < \frac{25}{3}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x+2 \geq 0 \\ -x-2 & \text{dla } x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{dla } x < -2 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{dla } x-3 \geq 0 \\ -x+3 & \text{dla } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{dla } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{dla } x < 3 \end{cases}$$

I $x \in (-\infty, -2)$ II $x \in \langle -2, 3)$ III $x \in \langle 3, +\infty)$

-2 3

I

$$-x-2-x+3 < \frac{25}{3}$$
$$-2x < \frac{22}{3}$$
$$x > -\frac{11}{3}$$
$$\begin{cases} x \in (-\infty, -2) \\ x \in \left(-\frac{11}{3}, +\infty\right) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$x \in \left(-\frac{11}{3}, -2\right)$$

II

$$x+2-x+3 < \frac{25}{3}$$
$$5 < \frac{25}{3}$$
$$x \in \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \langle -2, 3) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$x \in \langle -2, 3)$$

III

$$x+2+x-3 < \frac{25}{3}$$
$$2x < \frac{28}{3}$$
$$x < \frac{14}{3}$$
$$x < 4\frac{2}{3}$$
$$\begin{cases} x \in \langle 3, +\infty) \\ x \in \left(-\infty, \frac{14}{3}\right) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$x \in \left\langle 3, \frac{14}{3}\right)$$

Odp: I i II i III $x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$

Zadanie 11. (0–4)

Określamy kwadraty K_1 , K_2 , K_3 , … następująco:

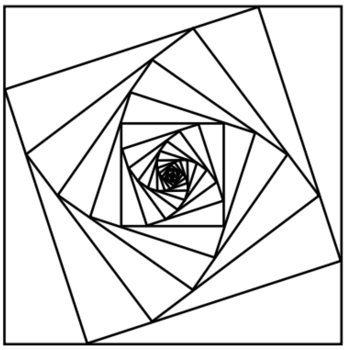
- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.
Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.

a



a

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu.

$Obw_1 = 4a$

z tw. Pitagorasa

$a_2^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2$, $a_2 > 0$

$a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$

czyli obwód: $Obw_2 = 4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a = \sqrt{10}a$

$q = \frac{\sqrt{10}a}{4a} = \frac{\sqrt{10}}{4} \in (-1, 1)$

czyli suma ciągu zbieżnego istnieje

$S = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{\frac{4-\sqrt{10}}{4}} = \frac{16a}{4-\sqrt{10}} \cdot \frac{4+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}} = \frac{16a(4+\sqrt{10})}{16-10} =$

$= \frac{8a(4+\sqrt{10})}{3}$

Zadanie 12. (0–4)

Rozwiąż równanie $3\sin^2 x - \sin^2(2x) = 0$ w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$.

$$3\sin^2 x - \sin^2(2x) = 0$$

$$3\sin^2 x - (2\sin x \cos x)^2 = 0$$

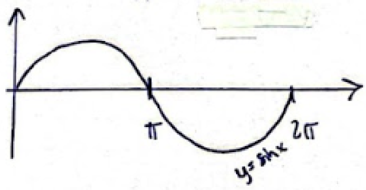
$$3\sin^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

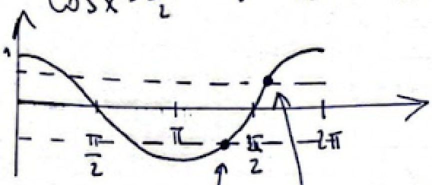
$$\sin^2 x\,(3 - 4\cos^2 x) = 0$$

$\sin^2 x = 0 \quad \vee \quad 3 - 4\cos^2 x = 0$

$\sin x = 0 \qquad \cos^2 x = \frac{3}{4}$

$x = \pi \ \vee \ x = 2\pi \qquad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \vee \ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$





$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

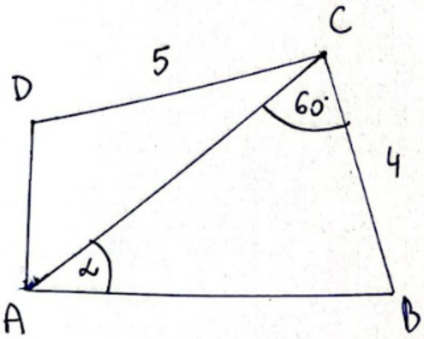
$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$x = \frac{7\pi}{6} \ \vee \ x = \frac{11\pi}{6}$

$$\boxed{x \in \left\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}}$$

Zadanie 13. (0–4)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze $60°$, natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.



z tw. sinusów:

$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$\frac{4}{\frac{1}{4}} = \frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}|AB|$

$8\sqrt{3} = |AB|$

z warunku okręgu wpisanego w czworokąt:

$|AD| + 4 = 5 + 8\sqrt{3}$

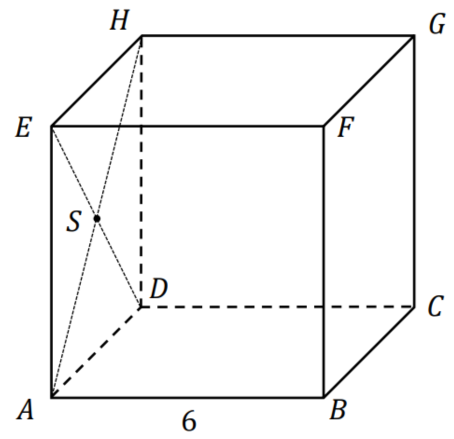
$|AD| = 1 + 8\sqrt{3}$

$Obw = 1 + 8\sqrt{3} + 5 + 4 + 8\sqrt{3} =$

$= 16\sqrt{3} + 10$

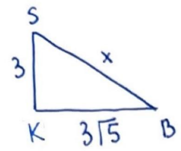
Zadanie 14. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta.

1) Punkt K na środku AD



$KB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$x^2 = 9 + 45$

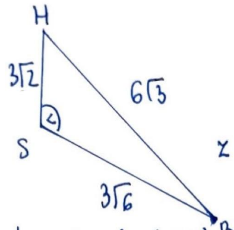
$x = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$SB = 3\sqrt{6}$

$SH = 3\sqrt{2}$

$BH = 6\sqrt{3}$

2)



z tw. cosinusów dla ΔSBH

$(6\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \cos\alpha$

$36 \cdot 3 = 18 + 54 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \cos\alpha$

$108 = 72 - 18\sqrt{12} \cdot \cos\alpha$

$36 = -18\sqrt{12} \cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{12}} = -\frac{2\sqrt{12}}{12} = -\frac{\sqrt{12}}{6}$

3)

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{12}{36}$

$\sin^2\alpha = \frac{24}{36}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \lor -\frac{\sqrt{6}}{3}$ odpada

4) $\frac{1}{2} 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot h$

$9 \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 6\sqrt{3} \cdot h$

$h = \frac{3\sqrt{72}}{6\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{24}}{6} = \sqrt{6}$

Zadanie 15. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 , x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$.

$$x^2+4x-\frac{m-3}{m-2}=0$$

$$\begin{cases} 1)\ \Delta>0 \\ 2)\ x_1^3+x_2^3>-28 \end{cases}$$

1) $\Delta>0$

$4^2-4\cdot\left(-\frac{m-3}{m-2}\right)>0$

$16+\frac{4m-12}{m-2}>0$

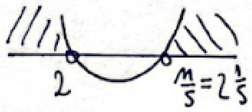
$\frac{16m-32+4m-12}{m-2}>0$

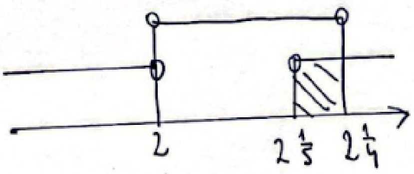
$\frac{20m-44}{m-2}>0$

$m-2\neq0$
$m\neq2$
$m\in\mathbb{R}-\{2\}$

$(20m-44)(m-2)>0$

$m=\frac{44}{20}=\frac{11}{5}$ $\quad m=2$





odp: $m\in\left(2\frac{1}{5},\ 2\frac{1}{4}\right)$

2) $x_1^3+x_2^3>-28$

$(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)>-28$

$-\frac{b}{a}\cdot\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)>-28$

$-\frac{b}{a}\cdot\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\frac{c}{a}\right)>-28$

$-b\left((-b)^2-3c\right)>-28$

$-4\left(16+3\cdot\frac{m-3}{m-2}\right)>-28 \quad /:(-4)$

$16+\frac{3m-9}{m-2}<7 \quad /-16$

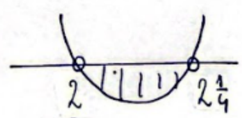
$\frac{3m-9}{m-2}<-9$

$\frac{3m-9+9(m-2)}{m-2}<0$

$(3m-9+9m-18)(m-2)<0$

$(12m-27)(m-2)<0$

$m=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$ $\quad m=2$



Zadanie 16. (0–7)

Rozważamy trójkąty ABC, w których $A = (0, 0)$, $B = (m, 0)$, gdzie $m \in (4, +\infty)$, a wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -2x$. Na boku BC tego trójkąta leży punkt $D = (3, 2)$.

a) Wykaż, że dla $m \in (4, +\infty)$ pole P trójkąta ABC, jako funkcja zmiennej m, wyraża się wzorem

$$P(m) = \frac{m^2}{m-4}$$

b) Oblicz tę wartość m, dla której funkcja P osiąga wartość najmniejszą. Wyznacz równanie prostej BC, przy której funkcja P osiąga tę najmniejszą wartość.

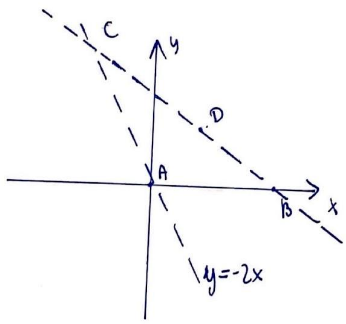
a) $A = (0, 0)$

$B = (m, 0)$, gdzie $m \in (4, +\infty)$

$y = -2x$

$C = (x, -2x)$

$D = (3, 2)$



1) WYZNACZAMY PROSTĄ BD

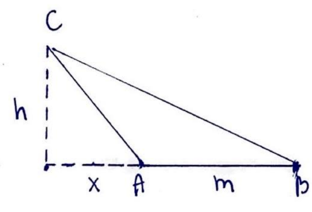
$$\begin{cases} 2 = 3a + b \\ 0 = ma + b \end{cases} \quad / -$$

$2 = 3a - ma$

$a = \frac{2}{3-m}$

$b = -ma = \frac{-2m}{3-m}$

$y = \frac{2}{3-m}x - \frac{2m}{3-m}$



C leży na prostej BD, zatem:

$-2x = \frac{2}{3-m}x - \frac{2m}{3-m}$

$\frac{2m}{3-m} = \left(\frac{2}{3-m} + 2\right)x$

$\frac{2m}{3-m} = \frac{2 + 6 - 2m}{3-m} \cdot x$

$x = \frac{2m}{3-m} \cdot \frac{3-m}{8-2m} = \frac{m}{4-m}$

$h = -2x = \frac{-2m}{4-m}$

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2m}{4-m} \cdot m = \frac{-m^2}{4-m} = \frac{m^2}{m-4}$

b) $f(m) = \dfrac{m^2}{m-4}$ $\quad D = (4, +\infty)$

$$f'(m) = \frac{2m(m-4) - m^2 \cdot 1}{(m-4)^2} = \frac{m^2-8m}{(m-4)^2}$$

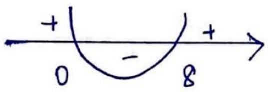
$f'(m) = 0$

$$\frac{m^2-8m}{(m-4)^2} = 0$$

$m^2 - 8m = 0$

$m(m-8) = 0$

$m = 0 \quad \vee \quad m = 8$



x	$(4, 8)$	8	$(8, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	f_{MIN}	$\nearrow$