



**Zadanie 1. (0-1)**

Granica  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(x-1)(x+2)}$  jest równa

A. (-1)

B. 0

C.  $\frac{1}{3}$

D. 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+2} = \frac{3}{3} = 1$$

---



**Zadanie 2. (0–1)**

Dane są wektory  $\vec{u} = [4, -5]$  oraz  $\vec{v} = [-1, -5]$ . Długość wektora  $\vec{u} - 4\vec{v}$  jest równa

A. 7

B. 15

C. 17

D. 23

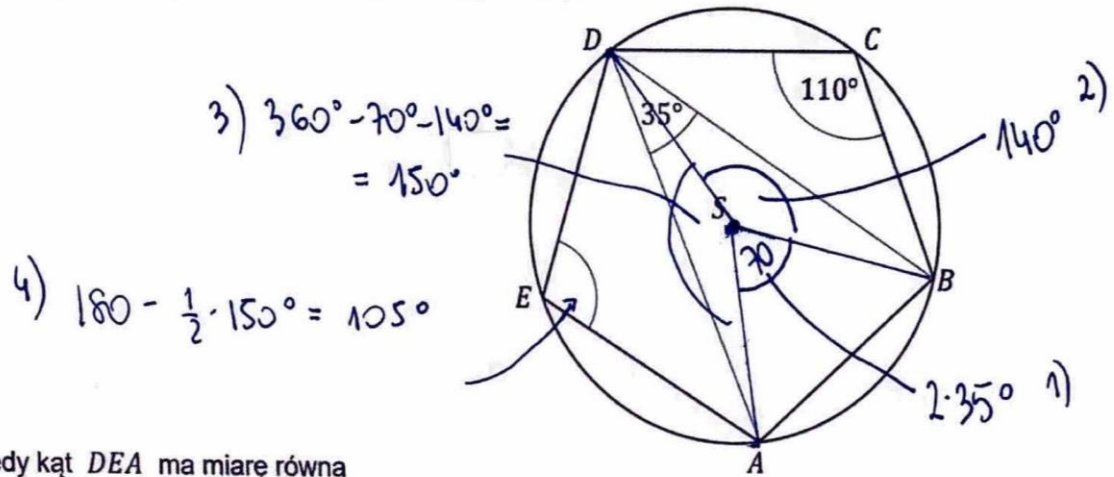
$$\begin{aligned}\vec{u} - 4\vec{v} &= [4, -5] - 4[-1, -5] = [4, -5] - [-4, -20] = \\ &= [4+4, -5+20] = [8, 15]\end{aligned}$$

$$d = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$



**Zadanie 3. (0-1)**

Punkty  $A, B, C, D, E$  leżą na okręgu o środku  $S$ . Miara kąta  $BCD$  jest równa  $110^\circ$ , a miara kąta  $BDA$  jest równa  $35^\circ$  (zobacz rysunek).



Wtedy kąt  $DEA$  ma miarę równą

A.  $100^\circ$

**B.  $105^\circ$**

C.  $110^\circ$

D.  $115^\circ$



**Zadanie 4. (0-1)**

Dany jest zbiór trzynastu liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ , z którego losujemy jednocześnie dwie liczby. Wszystkich różnych sposobów wylosowania z tego zbioru dwóch liczb, których iloczyn jest liczbą parzystą, jest

A.  $\binom{7}{2} + 49$

B.  $\binom{6}{1} \cdot \binom{7}{1} + 49$

C.  $\binom{13}{2} - \binom{7}{2}$

D.  $\binom{13}{2} - \binom{6}{2}$

$$\{ \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{8}, \underline{9}, \underline{10}, \underline{11}, \underline{12}, \underline{13} \}$$

$$\binom{13}{2} - \binom{7}{2}$$

na te sposoby  
losujemy 2 liczby

wszystkie sposoby  
wylosowanie dwóch  
nieparzystych, bo iloczyn  
nieparzysty

reszta będzie miała iloczyn parzysty



**Zadanie 5. (0–2)**

Wielomian  $W(x) = 7x^3 - 9x^2 + 9x - 2$  ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.  
Oblicz ten pierwiastek.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

$$f\left(\frac{2}{7}\right) = 7 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 + 9 \cdot \frac{2}{7} - 2 =$$

$$= 7 \cdot \frac{8}{343} - 9 \cdot \frac{4}{49} + \frac{18}{7} - 2 =$$

$$= \frac{8}{49} - \frac{36}{49} + \frac{126}{49} - \frac{98}{49} =$$

$$= 0$$

285

$$\frac{2}{7} \approx 0,2857\dots$$



**Zadanie 6. (0-3)**

Liczby rzeczywiste  $x$  oraz  $y$  spełniają jednocześnie równanie  $x + y = 4$  i nierówność  $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ . Wykaż, że  $x = 2$  oraz  $y = 2$ .

$$x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$$

$$x^3 - x^2y + y^3 - xy^2 \leq 0$$

$$x^2(x-y) - y^2(x-y) \leq 0$$

$$(x-y)(x^2-y^2) \leq 0$$

$$(x-y)(x-y)(x+y) \leq 0$$

$$(x-y)^2(x+y) \leq 0$$

$$x+y=4 \Rightarrow x=4-y$$

$$4(x-y)^2 \leq 0$$

$$4(4-y-y)^2 \leq 0$$

$$4(4-2y)^2 \leq 0 \quad | :4$$

$$(4-2y)^2 \leq 0$$

$$16-16y+4y^2 \leq 0 \quad | :4$$

$$y^2 - 4y + 4 \leq 0$$

$$\Delta = 0$$

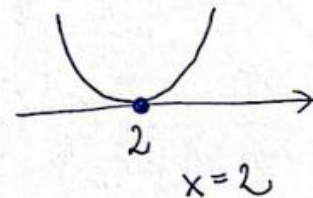
$$x_0 = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$$

$$\begin{cases} x=4-y \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 &= 4-y \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

ckd.



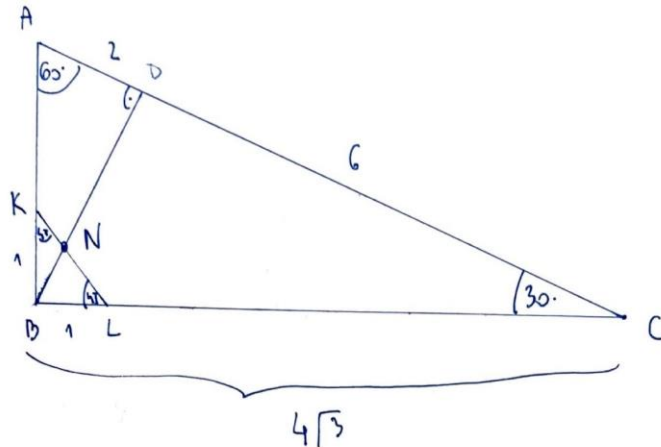




**Zadanie 7. (0-3)**

Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$ , w którym  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$  oraz  $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$ . Punkty  $K$  i  $L$  leżą na bokach – odpowiednio –  $AB$  i  $BC$  tak, że  $|BK| = |BL| = 1$  (zobacz rysunek). Odcinek  $KL$  przecina wysokość  $BD$  tego trójkąta w punkcie  $N$ , a ponadto  $|AD| = 2$ .

Wykaż, że  $|ND| = \sqrt{3} + 1$ .



Teraz:

$$|ND| = \sqrt{3} + 1$$

$\triangle ADB$  oraz  $\triangle BCD$  oraz  $\triangle BCA$   
to trójkąty charakterystyczne  $60^\circ, 30^\circ, 30^\circ$

stąd  $|BD| = 2\sqrt{3}$ ,  $|AB| = 4$

jeżeli  $|BD| = 2\sqrt{3}$  to  $|DC| = 6$  oraz  $|BC| = 4\sqrt{3}$

Z tw. sinusów w  $\triangle BKL$

$$\frac{|BN|}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 105^\circ}, \text{ bo } |\sphericalangle KNL| = 105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

$$\frac{|BN|}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin(60^\circ + 45^\circ)}$$

$$\frac{|BN|}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$
$$|BN| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} =$$

$$\begin{aligned} \sin(60^\circ + 45^\circ) &= \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$|BN| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{12} - 4}{4} = \frac{4\sqrt{3} - 4}{4} = \sqrt{3} - 1$$

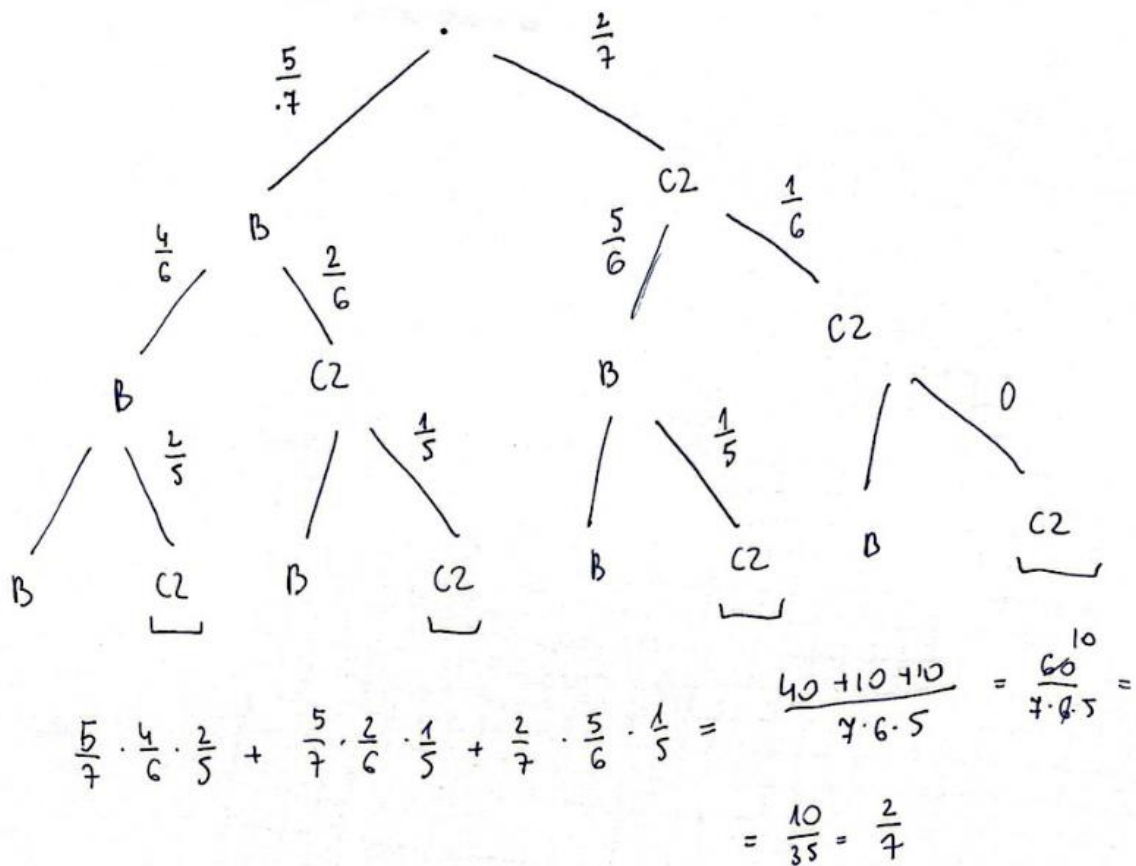
$$|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1$$





**Zadanie 8. (0-3)**

W pojemniku jest siedem kul: pięć kul białych i dwie kule czarne. Z tego pojemnika losujemy jednocześnie dwie kule bez zwracania. Następnie – z kul pozostałych w pojemniku – losujemy jeszcze jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w drugim losowaniu.





**Zadanie 9. (0-3)**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 8}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

Punkt  $P = (x_0, 3)$  należy do wykresu funkcji  $f$ . Oblicz  $x_0$  oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P$ .

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 8}$$

zak.  
 $x^2 + 2x + 8 \neq 0$   
 $\Delta < 0$   
 $x \in \mathbb{R}$

$$(3x^2 - 2x)' = 6x - 2$$

$$(x^2 + 2x + 8)' = 2x + 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x-2)(x^2+2x+8) - (3x^2-2x)(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2} = \\ &= \frac{6x^3 + 12x^2 + 48x - 2x^2 - 4x - 16 - (6x^3 + 6x^2 - 4x^2 - 4x)}{(x^2+2x+8)^2} = \\ &= \frac{6x^3 + 12x^2 + 48x - 2x^2 - 4x - 16 - 6x^3 - 6x^2 + 4x^2 + 4x}{(x^2+2x+8)^2} = \\ &= \frac{8x^2 + 48x - 16}{(x^2+2x+8)^2} \end{aligned}$$

$$P = (x_0, 3)$$

$$3 = \frac{3x_0^2 - 2x_0}{x_0^2 + 2x_0 + 8}$$

$$3x_0^2 + 6x_0 + 24 = 3x_0^2 - 2x_0$$

$$8x_0 = -24$$

$$x_0 = -3$$

$$P = (-3, 3)$$

$$a = f'(-3) = \frac{8 \cdot 9 + 48 \cdot (-3) - 16}{(9 - 6 + 8)^2} = \frac{72 - 144 - 16}{121} = -\frac{88}{121}$$

$$y = a(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{88}{121}(x + 3) + 3 =$$

$$= -\frac{88}{121}x - \frac{264}{121} + \frac{363}{121} = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$$



**Zadanie 10. (0-4)**

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

Wskazówka: skorzystaj z tego, że  $\sqrt{a^2} = |a|$  dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ .

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

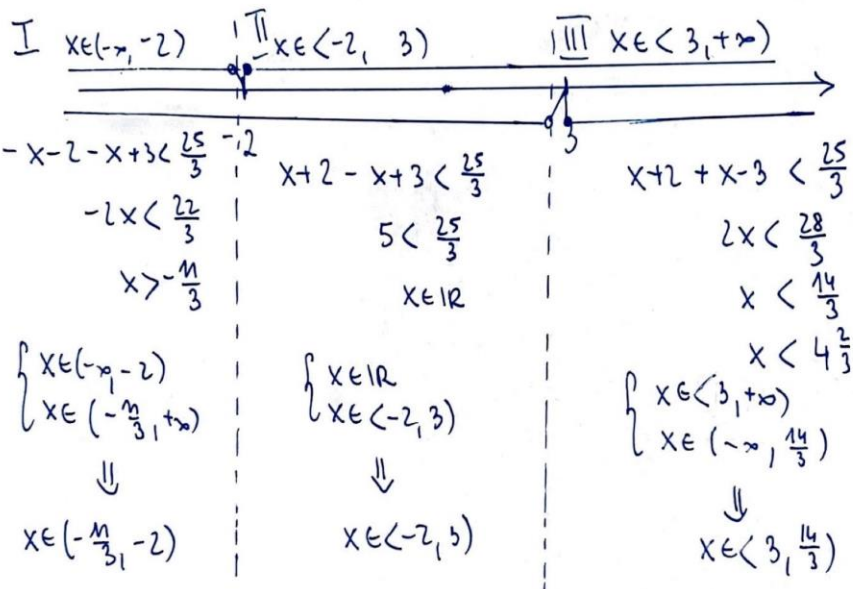
$$\sqrt{(x+2)^2} < \frac{25}{3} - \sqrt{(x-3)^2}$$

$$|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$$

$$|x+2| + |x-3| < \frac{25}{3}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x+2 \geq 0 \\ -x-2 & \text{dla } x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{dla } x < -2 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{dla } x-3 \geq 0 \\ -x+3 & \text{dla } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{dla } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{dla } x < 3 \end{cases}$$



odp: I i II i III  $x \in (-\frac{11}{3}, \frac{14}{3})$



### Zadanie 11. (0–4)

Określamy kwadraty  $K_1, K_2, K_3, \dots$  następująco:

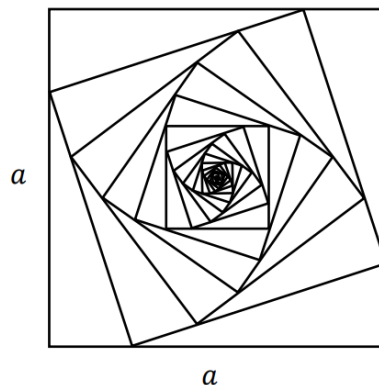
- $K_1$  jest kwadratem o boku długości  $a$
- $K_2$  jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu  $K_1$  i dzieli ten bok w stosunku  $1 : 3$
- $K_3$  jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu  $K_2$  i dzieli ten bok w stosunku  $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$ ,

- $K_n$  jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu  $K_{n-1}$  i dzieli ten bok w stosunku  $1 : 3$ .

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.

Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu.

$$\text{Obw}_1 = 4a$$

z tw. Pitagorasa

$$a_2^2 = \left(\frac{4}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2, \quad a_2 > 0$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$$

czyli obwód:  $\text{Obw}_2 = 4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a = \sqrt{10}a$

$$q = \frac{\sqrt{10}a}{4a} = \frac{\sqrt{10}}{4} \in (-1, 1)$$

czyli suma ciągu  
zbieżnego istnieje

$$\begin{aligned} S &= \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{\frac{4 - \sqrt{10}}{4}} = \frac{16a}{4 - \sqrt{10}} \cdot \frac{4 + \sqrt{10}}{4 + \sqrt{10}} = \frac{16a(4 + \sqrt{10})}{16 - 10} \\ &= \frac{8a(4 + \sqrt{10})}{3} \end{aligned}$$



**Zadanie 12. (0-4)**

Rozwiąż równanie  $3 \sin^2 x - \sin^2(2x) = 0$  w przedziale  $(\pi, 2\pi)$ .

$$3 \sin^2 x - \sin^2(2x) = 0$$

$$3 \sin^2 x - (2 \sin x \cos x)^2 = 0$$

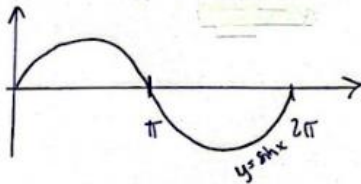
$$3 \sin^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x (3 - 4 \cos^2 x) = 0$$

$$\sin^2 x = 0$$

$$\sin x = 0$$

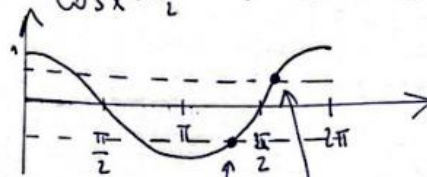
$$x = \pi \vee x = 2\pi$$



$$\vee \quad 3 - 4 \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$
$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

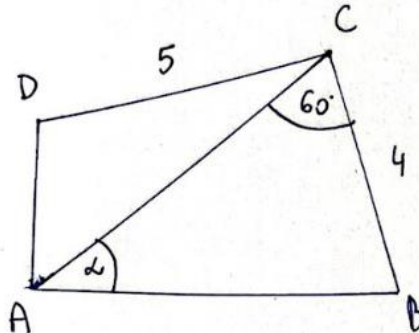
$$x = \frac{7\pi}{6} \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{6}$$

$$x \in \left\{ 0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$



**Zadanie 13. (0-4)**

Czworokąt  $ABCD$ , w którym  $|BC| = 4$  i  $|CD| = 5$ , jest opisany na okręgu. Przekątna  $AC$  tego czworokąta tworzy z bokiem  $BC$  kąt o mierze  $60^\circ$ , natomiast z bokiem  $AB$  – kąt ostry, którego sinus jest równy  $\frac{1}{4}$ . Oblicz obwód czworokąta  $ABCD$ .



Z tw. sinusów:

$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{\frac{1}{4}} = \frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} |AB|$$

$$8\sqrt{3} = |AB|$$

z warunku okręgu wpisanego w czworokąt:

$$|AD| + 4 = 5 + 8\sqrt{3}$$

$$|AD| = 1 + 8\sqrt{3}$$

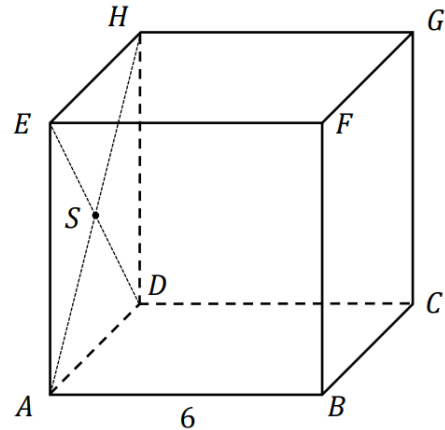
$$\text{Obw} = 1 + 8\sqrt{3} + 5 + 4 + 8\sqrt{3} =$$

$$= 16\sqrt{3} + 10$$



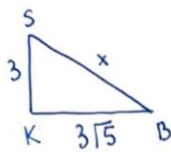
**Zadanie 14. (0-4)**

Dany jest sześcian  $ABCDEFGH$  o krawędzi długości 6. Punkt  $S$  jest punktem przecięcia przekątnych  $AH$  i  $DE$  ściany bocznej  $ADHE$  (zobacz rysunek).



Oblicz wysokość trójkąta  $SBH$  poprowadzoną z punktu  $S$  na bok  $BH$  tego trójkąta.

1) Punkt  $K$  na środku  $AD$



$$KB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

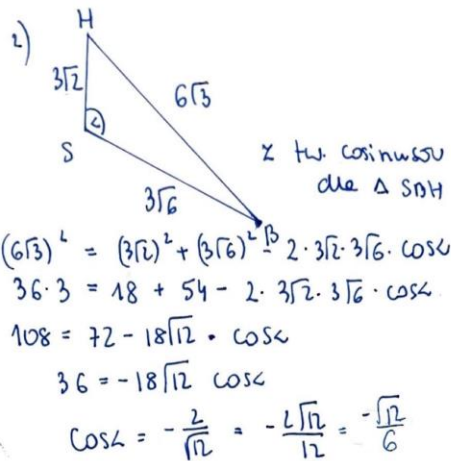
$$x^2 = 9 + 45$$

$$x = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$SB = 3\sqrt{6}$$

$$SH = 3\sqrt{2}$$

$$BH = 6\sqrt{3}$$



$$(6\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \cos \alpha$$

$$36 \cdot 3 = 18 + 54 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot \cos \alpha$$

$$108 = 72 - 18\sqrt{12} \cdot \cos \alpha$$

$$36 = -18\sqrt{12} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{12}} = -\frac{2\sqrt{12}}{12} = -\frac{\sqrt{12}}{6}$$

3)

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{12}{36}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{24}{36}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \vee -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

odpade

$$4) \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot h$$

$$9 \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 6\sqrt{3} \cdot h$$

$$h = \frac{3\sqrt{72}}{6\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{24}}{6} = \sqrt{6}$$



**Zadanie 15. (0-5)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m \neq 2$ , dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $x_1^3 + x_2^3 > -28$ .

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

$$\begin{cases} 1) \Delta > 0 \\ 2) x_1^3 + x_2^3 > -28 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \Delta > 0 \\ 4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) > 0 \\ 16 + \frac{4m-12}{m-2} > 0 \end{aligned}$$

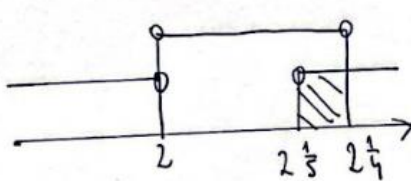
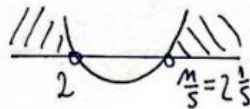
$$\frac{16m-32+4m-12}{m-2} > 0$$

$$\frac{20m-44}{m-2} > 0$$

$$\begin{aligned} m-2 \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \in \mathbb{R} - \{2\} \end{aligned}$$

$$(20m-44)(m-2) > 0$$

$$m \cdot \frac{44}{20} = \frac{11}{5} \quad m = 2\frac{1}{5}$$



odp:  $m \in (2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{4})$

$$2) \quad x_1^3 + x_2^3 > -28$$

$$(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2) > -28$$

$$-\frac{b}{a} \cdot \left( (x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2 \right) > -28$$

$$-\frac{b}{a} \cdot \left( \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a} \right) > -28$$

$$-b \left( \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a} \right) > -28$$

$$-4 \left( 16 + 3 \cdot \frac{m-3}{m-2} \right) > -28 \quad | :(-4) |$$

$$16 + \frac{3m-9}{m-2} < 7 \quad | -16$$

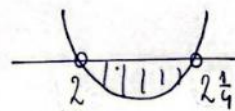
$$\frac{3m-9}{m-2} < -9$$

$$\frac{3m-9+9(m-2)}{m-2} < 0$$

$$(3m-9+9m-18)(m-2) < 0$$

$$(12m-27)(m-2) < 0$$

$$m = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} \quad m = 2\frac{1}{4}$$







**Zadanie 16. (0–7)**

Rozważamy trójkąty  $ABC$ , w których  $A = (0, 0)$ ,  $B = (m, 0)$ , gdzie  $m \in (4, +\infty)$ , a wierzchołek  $C$  leży na prostej o równaniu  $y = -2x$ . Na boku  $BC$  tego trójkąta leży punkt  $D = (3, 2)$ .

- a) Wykaż, że dla  $m \in (4, +\infty)$  pole  $P$  trójkąta  $ABC$ , jako funkcja zmiennej  $m$ , wyraża się wzorem

$$P(m) = \frac{m^2}{m - 4}$$

- b) Oblicz tę wartość  $m$ , dla której funkcja  $P$  osiąga wartość najmniejszą. Wyznacz równanie prostej  $BC$ , przy której funkcja  $P$  osiąga tę najmniejszą wartość.



$$b) f(m) = \frac{m^2}{m-4} \quad D = (4, +\infty)$$

$$f'(m) = \frac{2m(m-4) - m^2 \cdot 1}{(m-4)^2} = \frac{m^2 - 8m}{(m-4)^2}$$

$$f'(m) = 0$$

$$\frac{m^2 - 8m}{(m-4)^2} = 0$$

$$m^2 - 8m < 0$$

$$m(m-8) > 0$$

$$m < 0 \vee m > 8$$



x	(4, 8)	8	(8, +∞)
f'	-	0	+
f	↘	f <sub>MIN</sub>	↗



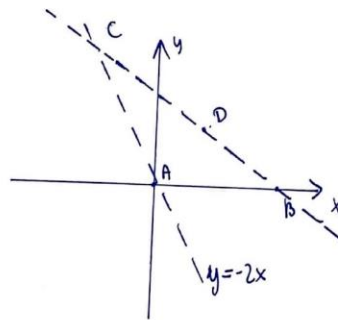
a)  $A = (0, 0)$

$B = (m, 0)$ , gdzie  $m \in (4, \infty)$

$y = -2x$

$C = (x_1, -2x_1)$

$D = (3, 2)$



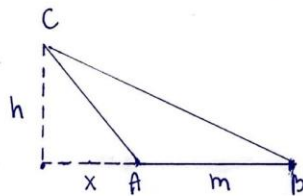
1) WYLNACIAMY PROSTĄ BD

$$\begin{cases} 2 = 3a + b \\ 0 = ma + b \end{cases} \quad | -$$

$$2 = 3a - ma \\ a = \frac{2}{3-m}$$

$$b = -ma = \frac{-2m}{3-m}$$

$$y = \frac{2}{3-m}x - \frac{2m}{3-m}$$



C leży na prostej BD, zatem:

$$-2x = \frac{2}{3-m}x - \frac{2m}{3-m}$$

$$\frac{2m}{3-m} = \left(\frac{2}{3-m} + 2\right)x$$

$$\frac{2m}{3-m} = \frac{2 + 6 - 2m}{3-m} \cdot x$$

$$x = \frac{2m}{3-m} \cdot \frac{3-m}{8-2m} = \frac{m}{4-m}$$

$$h = -2x = \frac{-2m}{4-m} \\ P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2m}{4-m} \cdot m = \frac{-m^2}{4-m} = \frac{m^2}{m-4}$$